Dokončení příkladu G2 g) ze cvičení 20.10.2011

$$\textit{Spočtěte:}\ \lim_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} \frac{6+n^{31}+2^{n+2}}{7n!+n^{18}}$$

Užijeme větu o dvou policajtech. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \le \frac{6+n^{31}+2^{n+2}}{7n!+n^{18}} \le \frac{6+n^{31}+2^{n+2}}{n!},$$

můžeme vzít $a_n = 0$, $c_n = \frac{6+n^{31}+2^{n+2}}{n!}$. Nyní stačí ověřit, že $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6+n^{31}+2^{n+2}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n!} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^{31}}{n!} + \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 2^n}{n!}, \tag{1}$$

pokud limity napravo existují. Vzhledem k tomu, že

$$0 \le \frac{6}{n!} \le \frac{6}{n},\ n \in \mathbb{N},$$

je první limita vpravo (1) rovna 0 (věta o policajtech + VOAL). Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 31$ platí nerovnost

$$0 \le \frac{n^{31}}{n!} = \frac{n}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{n-30}\frac{1}{(n-31)!} \le \frac{31^{30}}{(n-31)!} \le \frac{31^{30}}{n-31}$$

(čísla $\frac{n}{n-1}, \cdots, \frac{n}{n-30}$ mají každé hodnotu nejvýše 31) a protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{31^{30}}{n-31} = 0$$

dle věty o aritmetice limit, platí dle strážníků

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{31}}{n!} = 0.$$

Poslední limita v (1) je podle věty o policajtech rovna opět nule, neboť

$$0 \le \frac{4\cdot 2^n}{n!} = 4\frac{2}{n}\frac{2}{n-1}\cdots\frac{2}{2}\frac{2}{1} \le \frac{16}{n},$$

a $\lim_{n\to\infty} \frac{16}{n} = 0$ (VOAL), přičemž jsme v odhadu využili toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$ leží výrazy $\frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{2}{2}$ v intervalu $(0,1)$. Jelikož všechny limity na pravé straně (1) existují a jsou rovny nule, je (VOAL) limita vlevo (1) rovna nule. To byl však poslední předpoklad, jehož platnost jsme chtěli dokázat, abychom mohli použít větu o strážnících na posloupnost b_n. (Konkretně $n_0 := 32$ a $\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0 :\ a_n \le b_n \le c_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} c_n$.) Z toho tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6+n^{31}+2^{n+2}}{7n!+n^{18}} = 0.$$

Samozřejmě nemusíme limitu řešit přes policajty, lze například vytknout $n!$ jako "nejsilnější"člen a limitu řešit následovně:
Existují-li limity ve zlomku napravo, platí (VOAL) rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6+n^{31}+2^{n+2}}{7n!+n^{18}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!} \frac{\frac{6}{n!}+\frac{n^{31}}{n!}+\frac{2^{n+2}}{n!}}{7+\frac{n^{18}}{n!}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{6}{n!}+\lim_{n\to\infty} \frac{n^{31}}{n!}+\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{n!}}{\lim_{n\to\infty} 7+\lim_{n\to\infty} \frac{n^{18}}{n!}}.$$

Vidíme, že oproti původnímu postupu bychom museli navíc dokázat, že existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{18}}{n!} \in \mathbb{R},$$

a že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{18}}{n!} \neq -7.$$